不確定特異点の近傍での解の表現 (微分方程式の超局所解析)

真島, 秀行

数理解析研究所講究録
431巻 1981年 192-206

不確定特異点の近傍での解の表現

東大 理　真島秀行

$A(x)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の原点 0 の近傍 U 上整型な函数を成分とする m 次正方行列とする。また、p を正の整数として、次のような常微分方程式系を考える。

$$(S) \qquad x^{p+1}\frac{d}{dx}u = A(x)u .$$

このような線型方程式系に対して福原[1][2]の結果として、次の定理がある。

定理1.(形式的または代数的部分)

(S)は次のような形式的基本解行列を持つ。

$$\hat{\Phi}(x) = \hat{P}(x)\, x^{M} \exp(\Lambda(x))$$

ここで、$\hat{P}(x)$は形式的 Puiseux 級数、Mは定数行列、$\Lambda(x)$は対角行列でその成分は x^{-1}の Puiseux 多項式、$\Lambda(x)$とMとは可換。

2.

定理2.(解析的部分)

Uに含まれる0に向かう任意の方向lに対して、lを含む或る扇形領域S_lが存在して、S_l上整型かつ$\hat{P}(x)$を漸近級数とする$P(x)$があって、

$$\Phi(x) = P(x)\, x^M \exp(\Lambda(x))$$

が方程式系(S)の解となる。

筆者の興味はこれらの定理を完全積分可能な一階偏微分方程式系について確立することである。多変数への拡張の道をさぐるため、上に述べた定理を少し翻訳してみよう。定理1.は次のようにも云える。

定理1′.

$\mathbb{C}$上の変数xの形式有理函数体$\mathbb{C}((x))$の拡大体$\mathbb{C}((t))$, $x=t^g$, を適当にとると、それ上で、(S)を考えるれば、$\mathbb{C}((t))$係数の変換$\hat{P}(x)$で次の系(S)′にうつる。

$$(S)' \qquad x\frac{d}{dx}v = \left(x\frac{d}{dx}\Lambda(x) + M\right)v .$$

上のように$\mathbb{C}((x))$の代数拡大体$\mathbb{C}((t))$を考えるということは、幾何的に云えば、x平面のt平面による被覆を考えるという

ことに対応していて、定理2.は次の二つの事柄の帰結として[3.]
とらえられる。

事実1. x平面の0に向かう任意の方向lに対して、t平面の0に向かう方向$\tilde{l}$で、x平面に射影するとlになるものがある。

命題1. m次行列$P(x)$を未知函数行列とする常微分方程式

$$(E) \qquad x\frac{d}{dx}P = \frac{A(x)}{x^p}P - P\left(x\frac{d}{dx}\Lambda(x) + M\right)$$

を、t平面で考える(i.e. $t=x^{\frac{1}{q}}$とする)。(E)は形式巾級数解$\hat{P}(x)$を持っている。このとき、t平面の0に向かう全ての方向lに対して、lを含むt平面の扇形領域S_lが存在して、S_l上整型かつ、$\hat{P}(x)$を漸近級数とする(E)の解$P_l(x)$が存在する。

さて、それではこれから多変数の話に移ろう。考察の対象は次のような完全積分可能な一階偏微分方程式系である。

$$(S)_i \qquad x^{\alpha_i} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} u = A_i(x) u \qquad i = 1, \cdots, n.$$

ここで、$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in}) \in \mathbb{Z}_+^n$, $x^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_{i1}} \cdots\cdots x_n^{\alpha_{in}}$, $A_i(x)$は$\mathbb{C}^n$の原点0の近傍Uで整型な函数を成分とするm次正方行列で次のような式を満たすものである。

4.

$$(C.I)_{ij} \qquad x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{A_j(x)}{x^{\alpha_j}}\right) + \frac{A_j(x)}{x^{\alpha_j}}\frac{A_i(x)}{x^{\alpha_i}} = x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{A_i(x)}{x^{\alpha_i}}\right) + \frac{A_i(x)}{x^{\alpha_i}}\frac{A_j(x)}{x^{\alpha_j}}. \qquad i,j=1,\cdots,n.$$

これに対して次のような問題を考える。

問題. Uに対して、モノイダル変換、巾変換を有限回繰り返して或る空間Xで次のようなものを構成することが可能か。

i) XからUへの全射pがある。

ii) $X - p^{-1}(U \cap \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\}) \xrightarrow{p} U - \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\}$ は被覆をなす。

iii) $p^{-1}(0)$ の各点σで、適当な局所座標系ξが存在して、(S)をξについて考えると、$\hat{P}(\xi)\xi^M \exp\left(\frac{\hat{H}(\xi)}{\xi^\beta}\right)$ の形の形式的基本解行列がある。ここで、$\hat{P}(\xi)$は形式巾級数、Mは定数行列、$\hat{H}(\xi)$は形式巾級数成分の対角行列, Mと$\hat{H}(\xi)$は可換。

さらに、σに向かう任意の方向lに対して、lを含む扇形領域S_lが存在して、S_l上整型で$\hat{P}(\xi)$を漸近級数とする函数行列$P_l(\xi)$、$\hat{H}(\xi)$を漸近級数とする$H_l(\xi)$があって、$P_l(\xi)\xi^M \exp\left(\frac{H_l(\xi)}{\xi^\beta}\right)$ は(S)の解である。

このように問題を設定したのは次の理由による。

i) $U - \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\}$ の有限被覆, $X \to U \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\}$ があると

き、もう一つの空間Yが存在して，Yは X 及び $U\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\}$ 5.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ Y \arrow[ur] \arrow[r] & U\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\} \end{tikzcd}$$

の被覆空間になり，かつ，$Y\to U\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\}$ は，

$$Y \xrightarrow{p_{l+1}} Y_l \xrightarrow{p_l} Y_{l-1} \to \cdots \xrightarrow{p_1} Y_0 \to U\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\}$$

と分解されて、p_i $i=1,\cdots,l+1$ は monoidal 変換か、巾変換になる。

ii) 実際に次のような例がある。

a) $x^\alpha y^\beta x\frac{\partial}{\partial x}u=\begin{bmatrix}0, & 1\\ a, & 0\end{bmatrix}u$, $x^\alpha y^\beta y\frac{\partial}{\partial y}u=\begin{bmatrix}-\frac{\alpha+\beta}{2}x^\alpha y^\beta, & -1\\ -a, & \frac{\alpha+\beta}{2}x^\alpha y^\beta\end{bmatrix}u$

ここで，$a(x,y)$ は $2(\alpha+\beta)$次斉次多項式。$(x,y)=(0)$ で monoidal 変換して，

$x=\xi,\ y=\xi\eta$ と書ける空間で，

$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi}u=\begin{bmatrix}-\frac{\alpha+\beta}{2}, & \\ & +\frac{\alpha+\beta}{2}\end{bmatrix}u \quad , \quad \xi^{\alpha+\beta}\eta^\beta\eta\frac{\partial}{\partial\eta}u=\begin{bmatrix}-\frac{\alpha+\beta}{2}\xi^{\alpha+\beta}\eta^\beta, & -1\\ -a(\xi,\xi\eta), & \frac{\alpha+\beta}{2}\xi^{\alpha+\beta}\eta^\beta\end{bmatrix}u$$

$u=\begin{bmatrix}1, & \\ & \xi^{\alpha+\beta}\end{bmatrix}v$ なる変換で、

$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi}v=\begin{bmatrix}-\frac{\alpha+\beta}{2}, & \\ & -\frac{\alpha+\beta}{2}\end{bmatrix}v \quad , \quad \eta^\beta\eta\frac{\partial}{\partial\eta}u=\begin{bmatrix}-\frac{\alpha+\beta}{2} & -1\\ -a(1,\eta), & \frac{\alpha+\beta}{2}\end{bmatrix}u$$

となり、一変数の理論を用いて，形式解、漸近解が構成でき

る。$x=\xi\eta$, $y=\eta'$ と書ける空間でも同様である。

b) $x^{\alpha}x\frac{\partial}{\partial x}u=\begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{6}x^{\alpha}, & -\frac{2\alpha}{3}y \\ -\frac{2\alpha}{3}y^{2}, & \frac{\alpha}{6}x^{\alpha} \end{bmatrix}u$, $x^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}u=\begin{bmatrix} , & 1 \\ y, & \end{bmatrix}u$

$Y=x^{-\frac{2}{3}\alpha}y$, $X=x$ なる変数変換をすると、

$$X\frac{\partial}{\partial X}u=\begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{6}, & \\ & \frac{\alpha}{6} \end{bmatrix}u,\quad X^{\alpha}Y\frac{\partial}{\partial Y}u=\begin{bmatrix} , & YX^{\frac{2\alpha}{3}} \\ Y^{2}X^{\frac{4\alpha}{3}}, & \end{bmatrix}u$$

$u=\begin{bmatrix} X^{-\frac{\alpha}{6}} & \\ & X^{\frac{\alpha}{6}} \end{bmatrix}v$ なる変換により、

$$X\frac{\partial}{\partial X}v=0,\quad \frac{\partial}{\partial Y}v=\begin{bmatrix} , & 1 \\ Y, & \end{bmatrix}v$$

となるから、一変数の方程式を解いて元来の解を得る。

a) b) という典型的な例から、モノイダル変換なしには解の性質をとらえきれないことがよく分ると思う。

上記の問題に対して筆者は未だ完全には答えられていない。あるアルゴリズムで空間Xを構成して、大部分の点では形式解、漸近解の存在を云えるのだが、完全に全ての点を覆えない。無限に負巾を許した形式Laurent級数を用いれば、全ての点で形式解、漸近解の存在を云えるが、上の問題の期待された解答ではない。しかしながら、Laurent級数を用いたやり方も、解の或る種の性質を出すには有効なので、ここでそれを述べておく。

まず、"あるアルゴリズムで空間を構成して，大部分の点では形式解、漸近解の存在が云える"と書いたが、それを定理として述べると次の通り。

定理A. $(a,b)\times \mathbb{C}^{n-2}$ に双正則な複素多様体を中心とするモノイダル変換と巾変換を有限回繰り返して構成される複素多様体Xがあって、

i) XからUへの全射pがある。

ii) $X - p^{-1}(U\cap\bigcup_{i=1}^{m}\{x_i=0\}) \xrightarrow{p} U-\bigcup_{i=1}^{m}\{x_i=0\}$ は被覆をなす。

iii) $p^{-1}(U\cap\bigcup_{i=1}^{m}\{x_i=0\})$ の Zariski open set V の各点σで適当な座標系ξが存在し、(S)をξについて考えると、
$\hat{P}(\xi)\,\xi^M \exp\left(\frac{\hat{H}(\xi)}{\xi^p}\right)$ の形の形式的基本行列がある。ここで、$\hat{P}(\xi)$は形式巾級数，Mは定数行列，$\hat{H}(\xi)$は形式巾級数成分の対角行列，Mと$\hat{H}(\xi)$とは可換。

さらに，σに向かう任意の方向ℓに対して，ℓを含む扇形領域S_ℓが存在して，S_ℓ上整型で$\hat{P}(\xi)$を漸近級数とする函数行列$P_\ell(\xi)$，$\hat{H}(\xi)$を漸近級数とする$H_\ell(\xi)$があって、
$P_\ell(\xi)\,\xi^M \exp\left(\frac{H_\ell(\xi)}{\xi^p}\right)$ は(S)の解である。

この定理の証明は長くなるので書かないが、概略は次の通りである。

1) 形式解の存在に関する部分。方程式系$(S)_\xi$ を $\xi\in Q^n$に

対しても定義してやる必要がある。

$$(S)_\tau \qquad \left(\sum \tau_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) u = \frac{A_\tau(x)}{x^{\alpha_\tau}} u$$

$$\frac{A_\tau(x)}{x^{\alpha_\tau}} = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \frac{A_i(x)}{x^{\alpha_i}} .$$

未知函数の個数mと、次のように定義される数μ

$$\mu \equiv n - \dim\left\{\tau' \in \mathbb{Q}^n ;\ {}^\forall \tau \in \mathbb{Q}^n \ \frac{A_\tau(x)}{x^{\alpha_\tau}} = \sum A_{\tau,\beta} x^\beta \ (\beta \in \mathbb{Z}^n, \langle \beta, \tau' \rangle = 0)\right\}$$

についての帰納法で、次のフローチャートに基づき形式解の存在が証明される。

${}^\forall \tau \in \mathbb{Q}^n \ \mathrm{tr}\, A_\tau \equiv 0 \mod \hat{\mathcal{O}}$? $\xrightarrow{no}$ trace 調整操作

↓ yes

${}^\forall \tau \in \mathbb{Q}^n \ \alpha_\tau > 0$? $\xrightarrow{no}$ μ 減少

↓ yes

${}^\forall \tau \in \mathbb{Q}^n \ A_\tau(0)$ が巾零行列か? $\xrightarrow{no}$ m 減少

↓ yes

${}^\exists \tau \in \mathbb{Q}^n \ A_\tau(0) \neq 0$? $\xrightarrow{no}$ monoidal 変換.

↓ yes

${}^\exists \tau \in \mathbb{Q}^n \ A_\tau(0)$ が $J(m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ に相似か? $\xrightarrow{no}$ (*) 何度かの monoidal 変換, 巾変換, shearing 変換.

↓ yes

μ か m が減少.

注意. フローチャート中の(*)のところでも実は単因子に関

係したある量に関する帰納法を用いる。

2) 漸近解の存在に関する部分。形式解の構成のとき、m を減少させること、所謂、bloc-diagonalization（塊対角化）のところだけに、形式巾級数係数の変換が用いられているから、その変換に漸近解が存在することを云えばよい。そのことは次の定理に帰着する。

定理 B. 次のような非線型完全積分可能な一階偏微分方程式系，

$$(E)_i \quad x^\alpha x_i \frac{\partial}{\partial x_i} v = a_i(x, v) \qquad i = 1 \cdots n$$

$$(C.I)_{i,j} \qquad x^\alpha \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \alpha_i\right) a_j(x, v) + \partial_v a_j(x, v)\, a_i(x, v)$$
$$= x^\alpha \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \alpha_j\right) a_i(x, v) + \partial_v a_i(x, v)\, a_j(x, v)$$

を考える。ここで，$a_i(x, v)$ は $S(C, r) \times D \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ で正則かつ、v に関して一様な漸近展開を持つ函数とする。なお，$S(C, r)$ は $0 \in \mathbb{C}^n$ を頂点とする多重扇状領域，D は $\mathbb{C}^m$ の原点中心の多重円板である。v に関して一様な漸近展開を持つ、という意味は，ここでは一般の意味より強いものを採用する。すなわち、$\sum a_{i\beta}(u) x^\beta$ $(\beta \in \mathbb{Z}_+^n)$ という $\mathcal{O}(D)$ 係数の形式巾級数が存在して，普通の意味で、それが $a_i(x, u)$ の一様漸近級数になり、かつ $a_i(x, u) = \sum a_{i,\gamma}(x) u^\gamma$ $(\gamma \in \mathbb{Z}_+^m)$ と展開したときの係数 $a_{i\gamma}(x) \in \mathcal{O}(S(C, r))$ が $x_j' = (x_1 \cdots \hat{x}_j, \cdots x_n)$ について一様な x_j に関する漸近展開を持つ（$\forall j = 1, \cdots n$）こととする。

このとき、

(I). $\alpha>0$, $\lim_{t\to 0, v\to 0}\partial_v a_i(x,v)=A_{i0}$ が或る i について、逆を持つ行列

(II) $\alpha=0$.

のいずれかが満たされているとする。

もし、$(E)_i$ $i=1,\cdots,n$ が $u_j(x)=\sum_{\beta=0}^{\infty}u_{j\beta}(x_j')x_j^{\beta}$ （$u_{j\beta}(x_j')$ は $S(c_1,r_1)\times\cdots\times S(\widehat{c_j},r_j)\times\cdots\times S(c_n,r_n)$ で正則かつ、漸近展開可能な函数） $j=1,\cdots,n$ の形の形式解を有し、さらに、$u_{j\beta}(x_j')$ 全てを漸近級数に取り換えて得られる、x に関する形式巾級数が全て一致するならば、$S(c,r)$ に含まれる任意の0に向かう方向 l に対して、l を含む多重扇状領域 S_l が存在し、S_l 上正則かつ、$u_j(x)$ を x_j' に関して一様な x_j についての漸近級数とする $(E)_i$, $i=1,\cdots,n$ の解 $u(x)$ がある。

これの証明も比較的長いから略する。

さて、定理Aによより、$p^{-1}(U\cap\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\})$ の Zariski open set 上では、形式解も漸近解も存在することが云えたが、残った点ではどうなっているか。先に述べたようにLaurent級数をも用いれば、或る種の解答が得られる。次の命題が基本的である。

命題1. 与えられた線型微分方程式系（係数は U で正則）

$(S)_i$ $\quad x^{\alpha_i}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}u=A_i(x)u \quad\quad i=1,\cdots,n$

について、実は $\alpha_{ij}=0$. $j=n'+1,\cdots,n$ $(1\leq n'<n)$ だとす

る。すなわち：$y_i = x_i$ ，$i=1\cdots n'$；$z_j = x_j$ $j=n'+1,\cdots n$ と

変数を書くことにより、

$$(S)_i \qquad y^{\beta_i} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} u = A_i(y,z) u \qquad i=1,\cdots n'$$

$$(S)_j \qquad y^{\beta_j} z_j \frac{\partial}{\partial z_j} u = A_j(y,z) u \qquad j=n'+1,\cdots n$$

さらに，$A_j(y,z)$ は z_j で割り切れるものとする。ことき，

$$u = P(y,z) v$$

$$\begin{cases} P(y,z) = I + \sum_{|\gamma|=1}^{\infty} P_\gamma(y) z^\gamma & v \setminus \bigcup_{i=1}^{n'} \{y_i=0\} \times C^{n-n'} \text{で収束} \\ y^{|\gamma|\beta} P_\gamma(y) & \text{は}y\text{に関する収束巾級数で収束半径は}\gamma\text{によらない。} \end{cases}$$

$\beta = \max\{\beta_j \,;\, j=1+n',\cdots,n\}$

なる変換により、$(S)_i$，$(S)_j$ を次のような系に変換出来る。

$$(S)_i' \qquad y^{\beta_i} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} v = A_i(y,0) v$$

$$(S)_j' \qquad \frac{\partial}{\partial z_j} v = 0 \ 。$$

係数 $A_i(x)$ が、$\overbrace{\text{漸近展開}}^{S(c_1,r_1)\times\cdots\times S(c_n,r_n)\text{で正則で}}$ を持つ場合には、$P(y,z)$ を或る種の漸近性を満たすものとして構成出来る。すなわち、

命題 2．$Ai(x)$ を x_j' について一様な x_j に関する漸近展開 $\sum A_i^\gamma(x_j') x_j^\gamma$ を持つものとする。さらに，$A_i^\gamma(x_j')$ も漸近展開を持つと仮定する。この $Ai(x)$ を係数とする線型方程式系

$$(S)_i \qquad y^{\beta_i} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} u = A_i(y,z) u$$

$$(S)_j \qquad y^{\beta_j} \frac{\partial}{\partial z_j} u = A_i(y,z) u$$

（y,z の定義は上の命題と同様）、に対して、

$$\hat{P}(y,z) = I + \sum_{|\gamma|=1}^{\infty} \hat{P}_\gamma(y) z^\gamma$$

$y^{1+1/\beta}\hat{P}_J(y)$ がzについて正則かつ漸近展開をもつ, $\beta \equiv \max\{\beta_j ; j=n'+1,\cdots,n\}$ 12.

を変換行列とする変換. $u=\hat{P}(y,z)v$ によって、$(S)_i$ から $A_i(x)$ を漸近展開でおきかえてえられる系 $(\hat{S})_i$ は次のような系に変換される。

$(\hat{S})'_i \quad y^{\beta_i} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} v = \hat{A}_i(y,0)v \qquad i=1,\cdots,n'$

$(\hat{S})'_j \quad y^{\beta_j} \frac{\partial}{\partial z_j} v = 0 \qquad j=n'+1,\cdots,n$ 。

さらに、$S(c_1,r_1)\times\cdots\times S(c_{n'},r_{n'})$ の任意のコンパクト集合上一様な z に関する漸近級数が $\hat{P}(y,z)$ であるような行列函数 $P(y,z)$ が存在して, $u=P(y,z)v$ なる変換により、$(S)_i$ が次の系に変換される。

$(S)'_i \quad y^{\beta_i} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} v = A_i(y,0)v$

$(S)'_j \quad \frac{\partial}{\partial z_j} v = 0$

ここで, $A_i(y,0) = \lim_{z\to 0} A_i(y,z)$ 。

この命題を用いて次のことを主張出来る。

定理. C, $(a,b)\times\mathbb{C}^{n-2}$ に双正則な複素多様体を中心とするモノイダル変換と中変換を有限回繰り返して構成される複素多様体 X があって、

i) X から V への全射 p がある.

ii) $X - p^{-1}(V \cap \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\}) \xrightarrow{p} V - \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\}$ は被覆をなす。

iii) $p^{-1}(V \cap \bigcup_{i=1}^{n}\{x_i=0\})$ の任意の点 O で適当な座標系 ξ が

13.

存在し、(S) を ξ について考えると、

$$\hat{P}_0(\xi)\hat{P}_1(\xi'_{i_1},\xi''_{i_1})\cdots\hat{P}_q(\xi'_{i_q},\xi''_{i_q})(\xi''_{i_q})^M\exp\left(\frac{\hat{H}(\xi''_{i_q})}{(\xi''_{i_q})^\gamma}\right)$$

の形の形式的基本行列がある。ここで、

$\xi'_{i_h}=(\xi_1,\cdots,\xi_{i_h})$　$\xi''_{i_h}=(\xi_{i_h+1},\cdots,\xi_n)$　$h=1,\cdots,q$

$i_1<i_2<\cdots<i_q$

$P_h(\xi'_{i_h},\xi''_{i_h})=I+\sum P_\gamma(\xi''_{i_h})(\xi'_{i_h})^\gamma$ $(\gamma\in\mathbb{Z}^{n-i_h})$

$P_\gamma(\xi''_{i_h})$ は形式的 Laurent 級数で、$(\xi''_{i_h})^{|\gamma|\beta_h}$ $(\exists\beta_h)$ を掛けると形式巾級数となるもの。

M 定数行列.

$\hat{H}(\xi''_{i_q})$ ：ξ''_{i_q} の形式巾級数を成分とする対角行列。

M と $\hat{H}(\xi''_{i_q})$ とは可換。

さらに、σ に向かう任意の方向 l に対して、l を含む多重扇形領域 $S_l=S(c_1^l,r_1^l)\times\cdots\times S(c_n^l,r_n^l)$ が存在し、S_l 上正則で、$S(c_1^l,r_1^l)\times\cdots\times S(c_{i_h}^l,r_{i_h}^l)$ 上の任意のコンパクト集合上一様な (ξ''_{i_h}) に関する漸近展開が $\hat{P}_h(\xi'_{i_h},\xi''_{i_h})$ となるもの $P_h(\xi'_{i_h},\xi''_{i_h})$、$S(c_{i_q+1}^l,r_{i_q+1}^l)\times\cdots\times S(c_n^l,r_n^l)$ で正則かつ漸近展開を持つ行列函数 $\hat{H}_l(\xi''_{i_q})$ が存在して、

$$P(\xi)P_1(\xi'_{i_1},\xi''_{i_1})\cdots P_q(\xi'_{i_q},\xi''_{i_q})(\xi''_{i_q})^M\exp\left(\frac{H(\xi''_{i_q})}{(\xi''_{i_q})^\gamma}\right)$$

が (S) の解である。

この定理の証明の概略は次の通り。漸近性の部分は、定理 B と命題 2 による。形式解の存在を確立するには、定理 A の

証明中の帰納法をさらに次のように定義される数ν

$$\nu = \#\{j \in [1,n] ;\ ^{\forall}i=1\cdots n\ \ \alpha_{ij} \neq 0\}$$

(i.e. 線型微分方程式系の特異点集合の次元)

に関する帰納法を加え、モノイダル変換をしたときコンパクト集合がコンパクト集合に写されるということを用いる。

以上. 詳細は現在準備中の論文を見られたい。

参考文献.

福原 Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires II. J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. I.5. 1937 P.123～P.166

III. Mem. Fac. Sci. Kyushu Imp. Univ. A.2. 1942. P.125～P.137

H.L. Turrittin. Acta. Math. 93 (1955) P.27～P.66

Malmquist. Sur l'étude analytique des solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage d'un point singulier d'indétermination. I, II, Acta. Math. 73 (1940) P.87～P.129, 74 (1941). P.1.～P.64.

広中. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I.II. Ann. Math. vol 79. 1964. P.109～P.326.

追記.1. 漸近性の定義をややボカして述べているところがあるので、それをはっきりさせておく。一変数のときには自然な定義が一つあるが、多変数の場合は一様性の入れ方がいろいろ考えられどれが一番自然だとは云い切れないと思う。ここでは或る意味で一番強い漸近性の定義を与えておく。

$\mathbb{C}^n$ の 0 を頂点とする多重扇形領域 $S(c_1,r_1)\times\cdots\times S(c_n,r_n)$ 上で正則な函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ が漸近展開可能とは次のように帰納的に定義される。

$n=1$. $\exists\, \hat{f}=\sum f_\beta x^\beta \in \hat{\mathcal{O}}$ $\forall$閉扇形領域 $S(c',r')\subset S(c_1,r_1)$ $\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists K$

$$\Big|f-\sum_{\beta=1}^{N} f_\beta x^\beta\Big| \leqq K|x|^{N+1} \qquad x\in S(c',r')$$

$n-1$ まで定義されたとして，n の場合。

$\forall j=1,\cdots,n$ $\exists\, \hat{f}_j=\sum f_{j\gamma}(x_1,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_n)\,x_j^\gamma$ x_j について形式巾級数で，係数 $f_{j\gamma}(x_1,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_n)$ は $(n-1)$ 変数として，$S(c_1,r_1)\times\cdots\times\widehat{S(c_j,r_j)}\times\cdots\times S(c_n,r_n)$ で正則かつ漸近展開可能で，$f_{j\gamma}$ 全てを漸近級数におきかえたとき、全ての j に対して，$\hat{f}_j$ は同一の形式巾級数 $\hat{f}_0$ に一致する，

$\forall$閉扇形領域 $S(c_j',r_j')$ $\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists K$

$$\Big|f-\sum_{\gamma=1}^{N} f_{j\gamma}(x_1,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_n)\,x_j^\gamma\Big| \leqq K|x_j|^{N+1} \quad (x_1,\cdots,x_n)\in S(c_1,r_1)\times\cdots\times S(c_n,r_n)$$

すなわち、f は $\hat{f}_j$ に $x_j'=(x_1,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_n)$ について一様な x_j に関する漸近級数となる。

追記.2. 命題.2. での漸近性も上のものによる。